

Άσκηση

Έστω  $V$  δ.χ  $u, v \in V$ . Τότε ισχύει το εξής:  $u \perp v \Leftrightarrow \|u\| \leq \|u + \lambda v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Λύση

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \|u + \lambda v\|^2 &= \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \lambda \langle v, u \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle = \\ &= \|u\|^2 + 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \|v\|^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Παραδοίμως αν  $u \perp v$  από (1) έπεται ότι  $\|u + \lambda v\|^2 \geq \|u\|^2 \Rightarrow \|u + \lambda v\| \geq \|u\|$

$$(\Leftarrow) \text{ Έστω ότι } \|u\| \leq \|u + \lambda v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \|u\|^2 \leq \|u + \lambda v\|^2 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2)  $\|v\|^2 \lambda^2 + 2\lambda \langle u, v \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$  τριώνυμο 2ου  
βαθμού ως προς  $\lambda$

$$\Delta = (2\langle u, v \rangle)^2 - 4\|v\|^2 \cdot 0 = 4\langle u, v \rangle^2 \geq 0$$

Αν ~~καθώς~~  $\langle u, v \rangle \neq 0 \Rightarrow \Delta > 0$ . Τότε το τριώνυμο παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές Αξονο!

Άρα  $\langle u, v \rangle = 0$  και σε αυτήν την περίπτωση το δείξαμε ότι ισχύει από την πρώτη κατεύθυνση.

3 διανύσματα  $u_1, u_2, u_3$  είναι γρ. ανεξ αν έχου διακρίνουσα  $\neq 0$ .

Άρα  $u_1, u_2, u_3$  βρίσκουν στο  $\mathbb{R}^3$

### Παράδειγμα

$$u = (1, 2, 3)$$

$$u_1 = (2, 3, 4)$$

$$u_2 = (3, 4, 5)$$

$$u_3 = (4, 5, 7)$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\} \text{ βρίσκουν} \\ \text{του } \mathbb{R}^3$$

$$u = xu_1 + yu_2 + zu_3 \Rightarrow (2x + 3y + 4z, 3x + 4y + 5z, 4x + 5y + 7z) = (1, 2, 3) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 2 \\ 4x + 5y + 7z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (\dots)$$

### 6' τρόπος

Έχω ορθοκανονική βάση  $\Rightarrow u_1 \perp u_2, u_2 \perp u_3, u_1 \perp u_3$  και

$$\|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1$$

$$\langle u, u_1 \rangle = \langle xu_1 + yu_2 + zu_3, u_1 \rangle = x \langle u_1, u_1 \rangle + y \langle u_2, u_1 \rangle + z \langle u_3, u_1 \rangle = x$$

$$\text{Ομοίως } \langle u, u_2 \rangle = y \text{ και } \langle u, u_3 \rangle = z$$

Άρα για να βρω τα  $(x, y, z)$  αρκεί ν.β. τα εσωτερικά γινόμενα.

### Ορθοκανονικές βάσεις

Έστω  $A \subseteq V, V \text{ δ.σ.}$  Το  $A$  ονομάζεται ορθογώνιο σύνολο αν  
οποιαδήποτε 2 διανύσματα διαφορετικά του  $A$  είναι κάθετα μεταξύ  
τους ορθογώνια:  $\forall u, v \in A$  με  $u \neq v$  ισχύει  $u \perp v$

π.χ. Αν  $u \perp v$  το  $\{u, v\}$  είναι ορθογώνιο  
 $\{e_1, e_2, e_3\}$

-2-

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα διάνυσμα ονομάζεται μοναδιαίο αν  $\|u\| = 1$ .

π.χ.  $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$

Από τυχόν διάνυσμα  $u \in V, u \neq 0$  το διάνυσμα  $\frac{1}{\|u\|} u$  είναι μοναδιαίο.

Αφού  $\left\| \frac{1}{\|u\|} u \right\| = \frac{1}{\|u\|} \cdot \|u\| = 1$ .

### ΟΡΙΣΜΟΣ

1) Ένα σύνολο  $A \subseteq V, V$  δ.χ. ονομάζεται ορθοκανονικό εάν είναι ορθογώνιο και τα διανύσματά του είναι μοναδιαία.

2) Μια βάση ενός δ.χ.  $V$  ονομάζεται ορθοκανονική εάν είναι ορθοκανονικό σύνολο

π.χ.  $\{e_1, e_2, e_3\}$  στο  $\mathbb{R}^3$

### ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω  $\{u_1, u_2, u_3\} = A$  να είναι ένα ορθογώνιο σύνολο στο  $V$  με μη μηδενικό στοιχείο. Τότε το  $A$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

### Παρατήρηση

Έστω  $v_1, v_2, \dots, v_n$  διανύσματα κάθετα ανά 2 και  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ .

Τότε ~~εξάγεται~~ λογικά  $\|A_1 v_1 + A_2 v_2 + \dots + A_n v_n\|^2 = A_1^2 \|v_1\|^2 + A_2^2 \|v_2\|^2 + \dots + A_n^2 \|v_n\|^2$ .

Απόδειξη

$$\langle A_i v_i, A_j v_j \rangle = A_i A_j \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots$$

$$\text{Οπότε } \|A_1 v_1 + A_2 v_2 + \dots + A_n v_n\|^2 \stackrel{\substack{\text{γεννήσεων} \\ \text{πολυωνομίου} \\ \text{τελειώματος}}}{=} \|A_1 v_1\|^2 + \|A_2 v_2\|^2 + \dots + \|A_n v_n\|^2 = A_1^2 \|v_1\|^2 + A_2^2 \|v_2\|^2 + \dots + A_n^2 \|v_n\|^2$$

Απόδειξη (Πρότασης)

Αρα είναι ορθογώνιο το A έχουμε  $\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$

Έστω λοιπόν  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$  με  $\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_n u_n = 0$  (1)

$$\text{Αρα } \|\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_n u_n\|^2 = 0$$

$$\text{Αλλά από την παρατήρηση} \Rightarrow \mu_1^2 \|u_1\|^2 + \mu_2^2 \|u_2\|^2 + \dots + \mu_n^2 \|u_n\|^2 = 0 \quad (2)$$

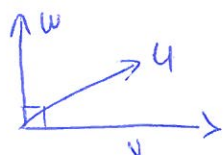
(Αρα  $u_1, u_2, \dots, u_n$  είναι κάθετα ανά 2)

$$\text{Από (1) και (2)} \Rightarrow \mu_1 \|u_1\| = \mu_2 \|u_2\| = \dots = \mu_n \|u_n\| = 0$$

Αλλά από υπόθεση  $u_1, \dots, u_n$  είναι μη μηδενικά  $\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$

που αυτό σημαίνει ότι  $u_1, u_2, \dots, u_n$  είναι γραμ. ανεξαρτ.

Αν  $u, v$  γραμ. ανεξ. στον  $V$   $w = u - \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$ . Τα  $u, w$  είναι κάθετα.



Αρα τα 2 διανύσματα  $u, v$  παίρνουμε ένα ορθοκανονικό σύνολο το

$$\left\{ \frac{u}{\|u\|}, \frac{w}{\|w\|} \right\}$$



Εστω  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  να είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο στον  $V$  -3-

με  $\dim V \geq n+1$  ή  $\dim V = +\infty$

Για  $n \geq 2$  θέλουμε να βρούμε  $u_0 \in V$  ώστε το  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n, u_0\}$  να είναι ορθοκανονικό σύνολο

Εστω  $w_0 \in V$  ώστε τα  $w_0, u_1, u_2, \dots, u_n$  να είναι γρ. ανεξ.  $w_0 \notin A$

Εστω  $u_0 = w_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \in B$

Θέλουμε  $\langle u_0, u_i \rangle = 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}\langle u_0, u_i \rangle &= \langle w_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, u_i \rangle = \\ &= \langle w_0, u_i \rangle + \lambda_1 \langle u_1, u_i \rangle + \dots + \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle + \dots + \lambda_n \langle u_n, u_i \rangle = \\ &= \langle w_0, u_i \rangle + \lambda_i\end{aligned}$$

Θέλουμε  $\langle u_0, u_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle w_0, u_i \rangle + \lambda_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = -\langle w_0, u_i \rangle$

Άρα  $\lambda_1 = -\langle w_0, u_1 \rangle$ ,  $\lambda_2 = -\langle w_0, u_2 \rangle$ , ...,  $\lambda_n = -\langle w_0, u_n \rangle$

Το ελέγχουμε φωνάζοντας του υπολογιστή ότι τα συγκεκριμένα  $\lambda_i \quad i=1, \dots, n$  ικανοποιούν την συνθήκη που θέλουμε.

Άρα βρήκαμε  $u_0 \in B$  ώστε  $u_0 \perp u_1, \dots, u_0 \perp u_n$ .

Αυτό μας λέει ότι  $B = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$  είναι ορθογώνιο.

Συνεπώς το σύνολο  $\left\{ \frac{u_0}{\|u_0\|}, u_1, u_2, \dots, u_n \right\}$  είναι ορθοκανονικό

Ετσι για παράδειγμα από 2 κάθετα διανύσματα στον  $\mathbb{R}^3$  μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$

## Μέθοδος Gram-Schmidt

Κάθε χώρο πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο έχει μια ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη

Για χώρο με διάσταση 2 :

Παίρνουμε  $u_1, u_2 \in V$  γρ. ανεξ.

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

Το  $\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|} \right\}$  είναι ορθοκανονική βάση

Για χώρο με διάσταση  $n \geq 3$

Έστω  $v_1, v_2, \dots, v_n$  να είναι η γρ. ανεξ. διανυσματα του  $V$

Θέτουμε  $v_2 = (\sum v_1, v_2)$ ,  $v_3 = (\sum v_1, v_2, v_3)$ ,  $\dots$ ,  $v_{n-1} = (\sum v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ ,  $v_n = v$

Ορίζουμε

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$\vdots$

$$u_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1} - \frac{\langle v_n, u_{n-2} \rangle}{\|u_{n-2}\|^2} u_{n-2} - \dots - \frac{\langle v_n, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 - \frac{\langle v_n, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

και ορίζουμε  $u_1 = v_1 = \{v_i\}$

$$u_2 = (\{u_1, u_2\})$$

$$u_3 = (\{u_1, u_2, u_3\})$$

$\vdots$

$$u_{n-1} = (\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\})$$

$$u_n = V = V_n$$

~~Πρόταση~~

Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι

1)  $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, \dots, u_n \neq 0$

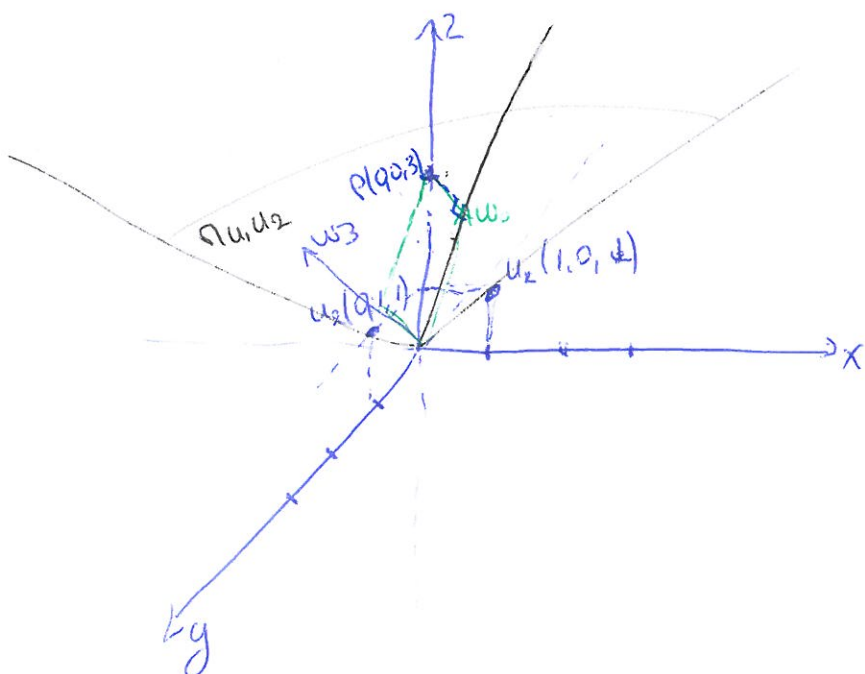
2) Το  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  είναι ορθόγωνιο για  $i = 2, 3, \dots, n$ .

3)  $v_i = u_i$  για  $i = 2, 3, \dots, n$ .

Παράδειγμα

Έστω  $u_1 = (1, 0, 1)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\varphi = (0, 0, 3)$

$\Pi_{u_1, u_2}$  είναι το επίπεδο που ορίζουν τα  $u_1, u_2$



Θέλουμε να υπολογίσω την απόσταση του  $\varphi$  από το  $\Pi_{u_1, u_2}$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

Ξεκινάμε να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^3 \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

$$\text{ώστε } (\{w_1, w_2\}) = (\{u_1, u_2\}) = \Pi_{u_1, u_2} \text{ με την G-S}$$

$$w_1 = u_1 = (1, 0, 1)$$

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2} (1, 0, 1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 =$$

$$= (0, 0, 1) - \frac{1/2}{3/2} \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} (1, 0, 1) =$$

$$= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Θεωρώ ως  $u_3$

ένα ~~πρόσθετο~~ διάνυσμα

π. αωφ. των  $u_1, u_2$

έστω  $u_3 = (0, 0, 1)$

(ελέγχω αν όπως είναι)  
π. αωφ.

Από G-S το  $w_3$  είναι κάθετο στο επίπεδο  $\Pi_{u_1, u_2}$

(Βλέπω και από το σχήμα ότι)  $w_0 + \lambda w_3 = (0, 0, 3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow w_0 = (0, 0, 3) - \lambda w_3 \quad \left( \text{αφ' ου τις εδιωγέρη το } \|\lambda w_3\| \right)$$

$$w_0 \perp \lambda w_3 \Leftrightarrow \langle (0, 0, 3) - \lambda w_3, \lambda w_3 \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \left(\frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}, 3 - \frac{\lambda}{3}\right), \lambda \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\lambda^2}{9} - \frac{\lambda^2}{9} + \left(3 - \frac{\lambda}{3}\right) \frac{\lambda}{3} = 0 \Rightarrow -\frac{2\lambda^2}{9} + \lambda - \frac{\lambda^2}{9} = 0 \Rightarrow \lambda - \frac{\lambda^2}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) = 0 \rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 3$$

$$\text{Αρα } \|\lambda w_3\| = \left\| 3 \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$